

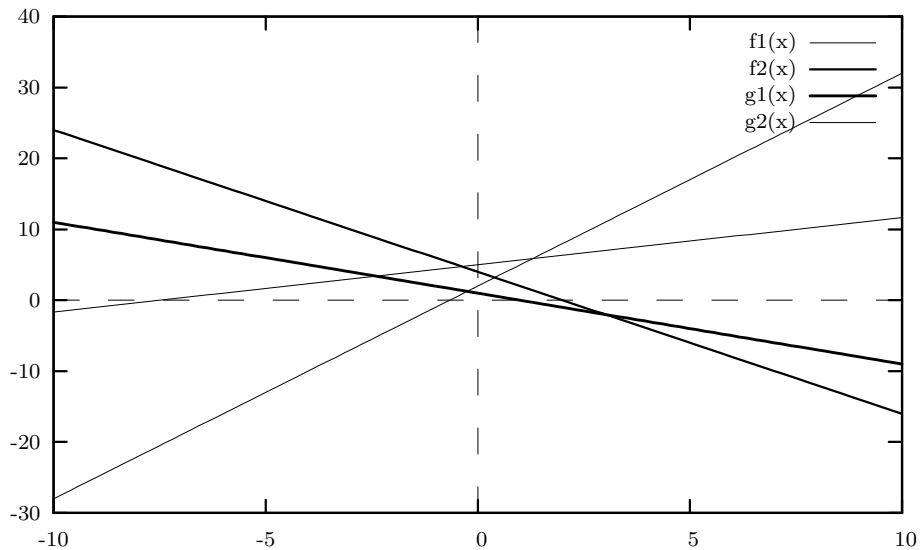
## Testbogen

1. Berechnen sie die Schnittpunkte der folgenden Funktionen und zeichnen sie die Funktionsgraphen

(a)  $f_1(x) = 3x + 2, g_1(x) = -x + 1$

(b)  $f_2(x) = -2x + 4, g_2(x) = \frac{2}{3}x + 5$

Lösung:



(a)

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow 3x + 2 = -x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

(b)

$$f_2(x) = g_2(x) \Leftrightarrow 2x + 4 = \frac{2}{3}x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

2. Berechnen sie die lineare Funktion, die durch die folgenden Punkte geht:

(a)  $P_1 = (-1/-7), P_2 = (2/2)$

(b)  $P_3 = (6/-1), P_4 = (-2/-\frac{19}{3})$

Lösung:

(a)  $P_1 = (-1/-7), P_2 = (2/2) \Rightarrow f(x) = 3x - 4$

(b)  $P_3 = (6/-1), P_4 = (-2/-\frac{19}{3}) \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x - 5$

3. Zeichnen sie die Funktionsgraphen der folgenden Funktionen und bestimmen sie die Nullstellen, Definitionsbereich und Wertebereich.

(a)  $f(x) = x^2 - x - 6$

- (b)  $f(x) = e^x + 2$
- (c)  $f(x) = e^{-x} + 2$
- (d)  $f(x) = e^{x-2}$
- (e)  $f(x) = 2 \ln(x+1)$
- (f)  $f(x) = \ln(x) + 3$

Lösung:

(a)  $f(x) = x^2 - x - 6 = (x - 0,5)^2 - 6,25 = (x+2)(x-3)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 3, D = \mathbb{R}, W = (-6, 25; \infty)$$

(b)  $f(x) = e^x + 2, D = \mathbb{R}, W = (2; \infty)$ , keine Nullstellen

(c)  $f(x) = e^{-x} + 2, D = \mathbb{R}, W = (2; \infty)$ , keine Nullstellen

(d)  $f(x) = e^{x-2}, D = \mathbb{R}, W = (0; \infty)$ , keine Nullstellen

(e)  $f(x) = 2 \ln(x+1), D = \{x \in \mathbb{R} | x > -1\}, W = \mathbb{R}, f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(f)  $f(x) = \ln(x) + 3, D = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}, W = \mathbb{R}, f(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-3}$

4. Lösen sie die folgenden Gleichungen

(a)  $x - \sqrt{6 - 2x} = -9$

(b)  $\ln(x) - \ln(x+2) = 3$

(c)  $\frac{x+2}{x-1} - 3 = \frac{3}{x+1}$

(d)  $(e^x \cdot e^2)^3 = 5$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} x - \sqrt{6 - 2x} &= -9 && | +9 + \sqrt{6 - 2x} \\ \Rightarrow x + 9 &= \sqrt{6 - 2x} && | (\dots)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 18x + 81 &= 6 - 2x && | -6 + 2x \\ \Leftrightarrow x^2 + 20x + 75 &= 0 && \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= -10 \pm \sqrt{100 - 75} = -10 \pm 5 && \\ \Leftrightarrow x_1 &= -5, x_2 = -15 && \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} x_1 = -5: \quad -5 - \sqrt{6 - 2(-5)} &= -9 \\ &= -5 - 4 = -9 \Rightarrow x_1 = -5 \text{ ist Lösung} \\ x_2 = -15: \quad -5 - \sqrt{6 - 2(-15)} &= -9 \\ &= -5 - 6 \neq -9 \Rightarrow x_2 = -15 \text{ ist nicht Lösung} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \ln(x) - \ln(x+2) &= 3 \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) &= 3 && | e^{\dots} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} &= e^3 && | \cdot (x+2) \\ \Leftrightarrow x &= e^3 x + 2e^3 && | - e^3 x \\ \Leftrightarrow x(1 - e^3) &= 2e^3 && : (1 - e^3) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2e^3}{1 - e^3} \end{aligned}$$

(c)  $D = \mathbb{R}/\{-2, 6\}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2x-1}{x+2} - 3 = \frac{x+3}{x-6} && | \cdot (x+2)(x-6) \\
 \Leftrightarrow & (2x-1)(x-6) - 3(x+2)(x-6) = (x+3)(x+2) \\
 \Leftrightarrow & 2x^2 - 13x + 6 - 3x^2 + 12x + 36 = x^2 + 5x + 5 && | + x^2 + x - 42 \\
 \Leftrightarrow & 2x^2 + 6x - 36 = 0 && | : 2 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + 3x - 18 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 18} \\
 \Leftrightarrow & x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} \\
 \Leftrightarrow & x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 3; x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -6
 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
 D &= \mathbb{R} \\
 (e^x \cdot e^2)^3 &= 5 \\
 \Leftrightarrow e^{3(x+2)} &= 5 && | \ln(\dots) \\
 \Leftrightarrow 3(x+2) &= \ln(5) && | - 6 \\
 \Leftrightarrow 3x &= \ln(5) - 6 && | : 3 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3 \ln(5)} - 2
 \end{aligned}$$

5. Vereinfachen Sie die folgenden Terme

(a)  $\frac{x-y}{x} - \frac{x^2-y^2}{x^2-xy}$

(b)  $\frac{a}{b(x-1)} + \frac{b}{a(1-x)}$

(c)  $\frac{4ax-4x}{a+1} \cdot \frac{1}{4(a-1)}$

(d)  $\frac{((x^3)^{\frac{1}{6}})^4 (x^3)^{-\frac{5}{6}}}{x^{-2} x^{\frac{5}{2}}}$

Lösung:

(a)  $\frac{x-y}{x} - \frac{x^2-y^2}{x^2-xy} = \frac{x-y}{x} - \frac{(x-y)(x+y)}{x(x-y)} = \frac{x-y-(x+y)}{x} = \frac{-2y}{x}$

(b)  $\frac{a}{b(x-1)} - \frac{b}{a(1-x)} = \frac{a}{b(x-1)} + \frac{b}{a(x-1)} = \frac{a^2}{ab(x-1)} + \frac{b^2}{ab(x-1)} = \frac{a^2+b^2}{ab(x-1)}$

(c)  $\frac{4ax-4x}{a+1} \cdot \frac{1}{4(a-1)} = \frac{4x(a-1)}{a+1} \cdot \frac{1}{4(a-1)} = \frac{x}{a+1}$

(d)  $\frac{((x^3)^{\frac{1}{6}})^4 (x^3)^{-\frac{5}{6}}}{x^{-2} x^{\frac{5}{2}}} = x^{3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 4 + 3 \cdot (-\frac{5}{6}) - (-2) - \frac{5}{2}} = x^{-1}$

6. Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

(a)  $f(x) = 3x^5 - 2x^9 + 6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^3}$

(b)  $f(x) = \frac{x^8}{e^x}$

(c)  $f(x) = e^{x^2} \cdot x^2$

(d)  $f(x) = \ln(x + x^2)$

(e)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2e^x}$

(f)  $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^3$

(g)  $f(x) = \frac{x^3-4}{1-x}$

(h)  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

Lösung

(a)

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^5 - 2x^9 + 6\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^3} \\&= 3x^5 - 2x^9 + 6x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-3} \\f'(x) &= 15x^4 + 2x^{-\frac{2}{3}} + 6x^{-4}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^8}{e^x} \\f'(x) &= \frac{8x^7 \cdot e^x - x^8 \cdot e^x}{(e^x)^2} \\&= \frac{8x^7 - x^8}{e^x}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{x^2} \cdot x^2 \\f'(x) &= e^{x^2} \cdot 2x \cdot x^2 + e^{x^2} \cdot 2x \\&= e^{x^2} \cdot (2x^3 + 2x)\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(x + x^2) \\f'(x) &= \frac{1}{x + x^2} \cdot (1 + 2x)\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x^2 - 2e^x} = (x^2 - 2e^x)^{\frac{1}{2}} \\f'(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 2e^x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 2e^x)\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(\frac{x}{x+1}\right)^3 \\f'(x) &= 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \\&= 3\frac{x^2}{(x+1)^4}\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^3 - 4}{1 - x} \\f'(x) &= \frac{3x^2(1-x) + x^3}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \\ &= \left( x + \left( x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \left( x + \left( x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \left( x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) \right) \end{aligned}$$